

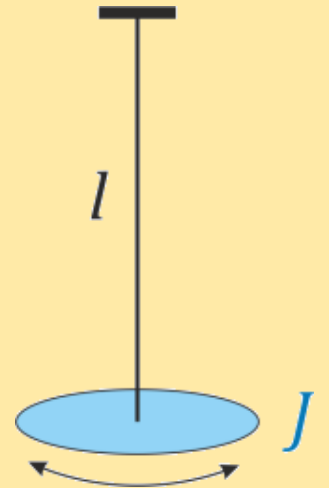
Torzní kyvadlo a jeho kmity (i při velké amplitudě)

Leoš Dvořák, Eliška Bendová

Katedra didaktiky fyziky, MFF UK

Co je vlastně torzní kyvadlo?

- Svislý závěs (drát, vlákno, tenká tyč) a na něm zavěšené těleso, které se otáčí kolem svislé osy tam a zpět...
- Do rovnovážné polohy ho vrací moment síly daný zkroucením závěsu — tedy torzí, odtud název.
- Závěs: tenký drát/vlákno $\Rightarrow$ nepatrný moment síly stačí k rozkmitání. Využili to už Einstein a de Haas ve svém pokusu v roce 1915.
- Dodnes se užívá jako velmi citlivé zařízení i ve vědě (např. měření tlaku záření laseru, jde o síly na úrovni 10 pikonewtonů !). Ale užívá se také ve výuce (laboratorní úloha: měření modulu pružnosti ve smyku).



Náš cíl:

**Torzní kyvadlo, které lze postavit velice jednoduše,
a přesto s ním jde dobře ověřovat teorii.**

Co na to teorie?

Kroucení tyče délky l , poloměru R
(modul pružnosti ve smyku G):

$$M = \left(\pi G R^4 / 2l \right) \varphi$$

Pro zavěšené těleso o momentu setrvačnosti J
(analogie 2. Newtonova zákona):

$$J \cdot \varepsilon = -M$$

Po dosazení — rovnice pohybu zavěšeného tělesa:

$$J \cdot \varepsilon = - \left(\pi G R^4 / 2l \right) \varphi$$

...analogie pohybu
tělesa na pružině:

$$m \cdot a_x = -k \cdot x$$

Perioda kmitů:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2lJ}{\pi G R^4}}$$

Co je zajímavé:

Úhlové zrychlení je přímo úměrné φ .
To je rozdíl oproti matematickému/fyzickému
kyvadlu (tam vystupuje $\sin \varphi$).

**☐ Kmity torzního kyvadla by měly být
harmonické i při velkých amplitudách,
perioda by neměla záviset na amplitudě!**

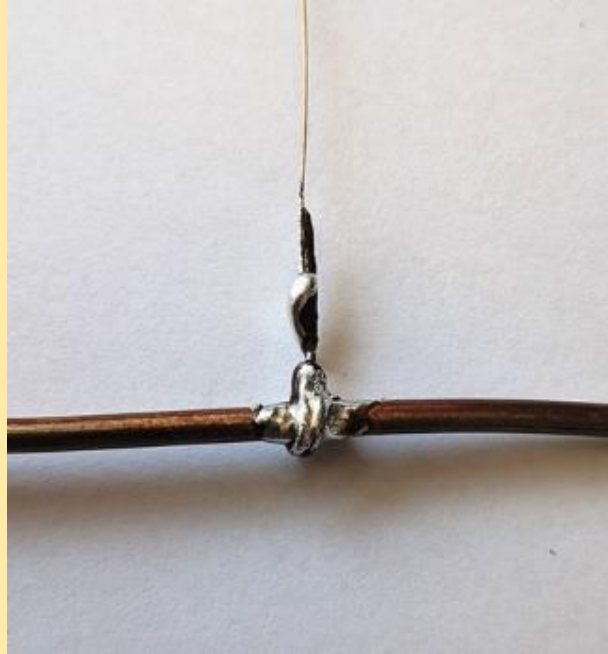
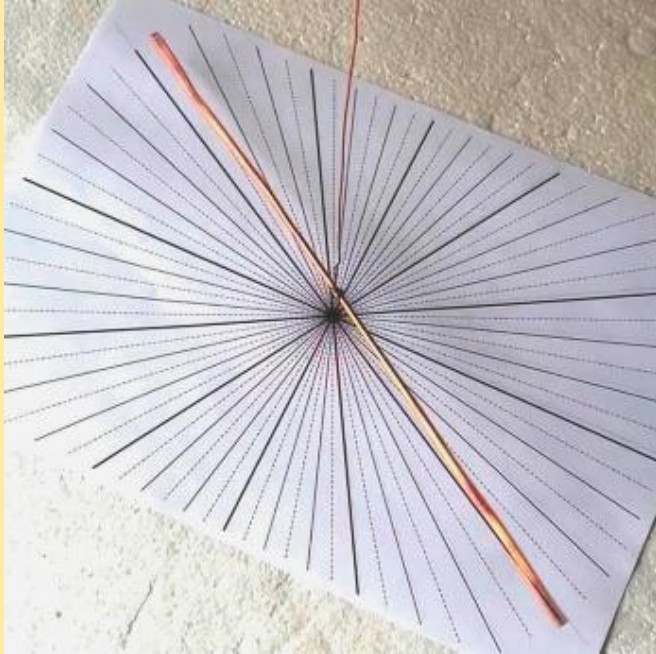
Souhlasí experiment s teorií? (aneb na co se můžeme ptát)

1. Je pohyb torzního kyvadla opravdu harmonický i pro velké amplitudy?
2. Opravdu perioda kmitů nezávisí na amplitudě?
3. Opravdu závisí perioda na poloměru závěsu jako $T \sim 1/R^2$?
4. Opravdu závisí perioda na délce závěsu jako $T \sim \sqrt{l}$?
5. Je modul pružnosti ve smyku G určený z periody kmitů ve shodě s tabulkovou hodnotou?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I_J}{\pi G R^4}}$$

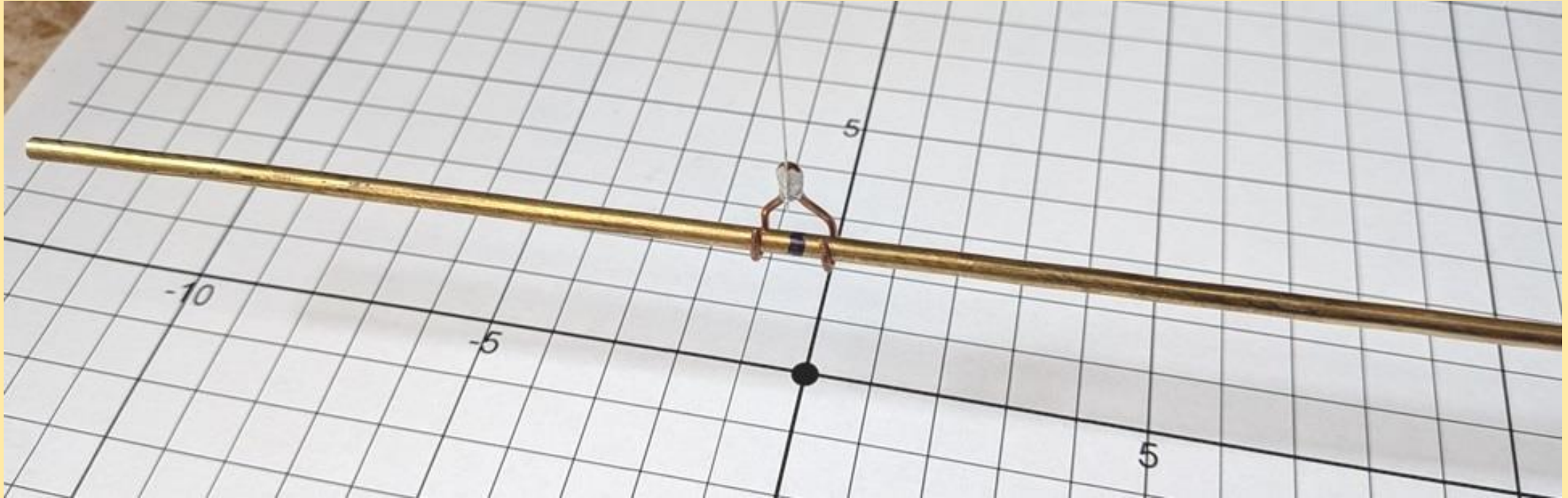
A konečně: Dá se tohle vše ověřit pokusy s jednoduchými pomůckami...?

Jak to postavit? Verze 1



Tělesem je tyč z tlustšího měděného drátu připájená k závěsu (nejtenčí kytarová struna e). Nahoře je závěs uchycen do držáku z hliníkové destičky, svěrka drží svislou polohu.

Jak to postavit? Verze 2

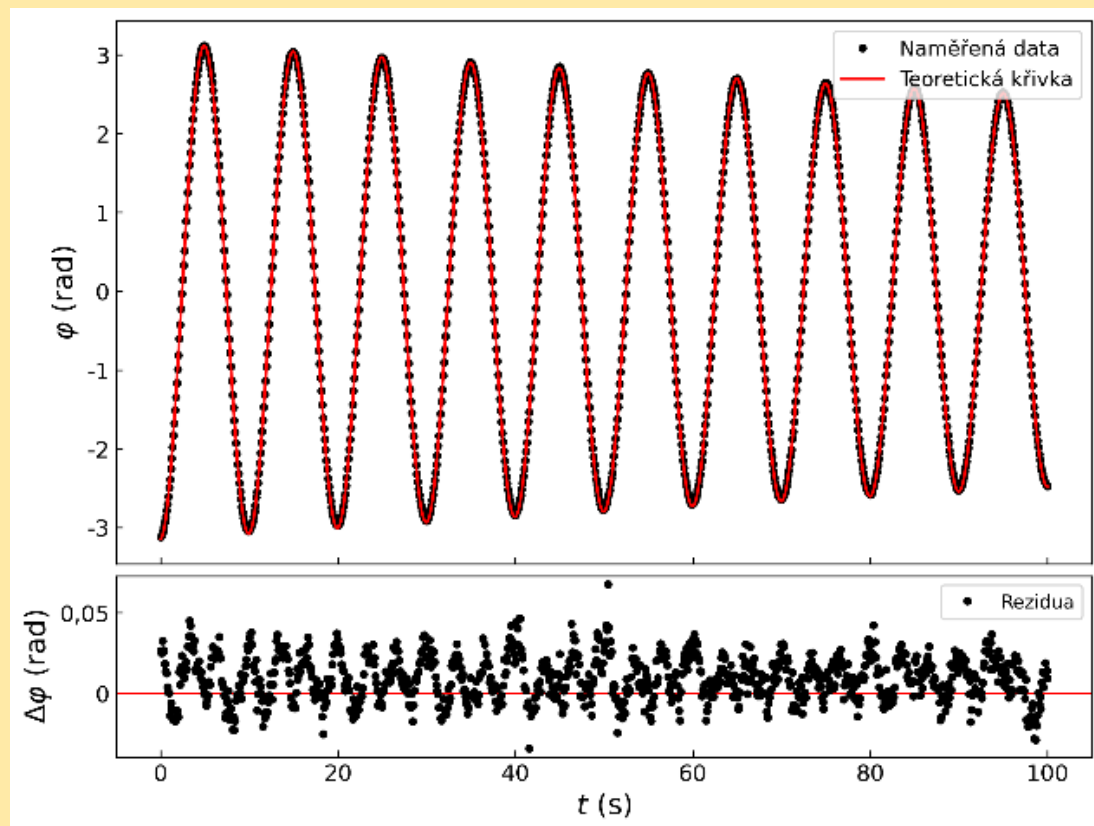


Verze 2 (po obhajobě Bc. práce): Na spodní okraj závěsu (ocelové struny různých průměrů) je připájen malý držák ze zvonkového drátu — do něj lze zasouvat mosazné tyčky různých délek.

Jak jsme měřili?

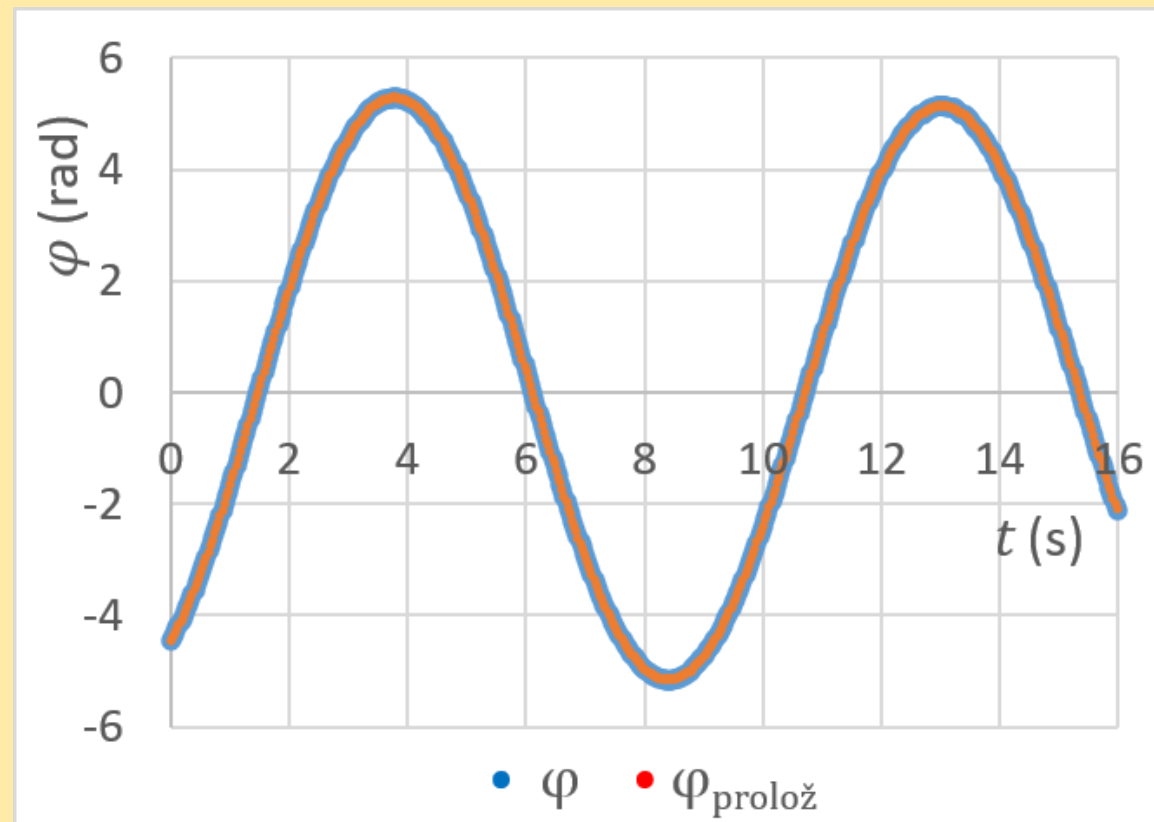
- Vysokorychlostní fotoaparát Casio Exilim → video → analýza v programu Tracker → data zpracována v Excelu
- Alternativa: běžný fotoaparát (Canon PowerShot S95, 30 snímků/s), v jednom případě mobil na stojanu — funguje to i tak...
- Měření period i ručně: digitální stopky, většinou z deseti kmitů
- Závěsy: kytarová struna e, smaltované měděné dráty ($\varnothing$ 0,3–1,0 mm), ocelové struny D'Addario PL008/PL0095/PL016/PL024 ($\varnothing$ 0,200–0,610 mm)
- Přesnost výsledků je nejvíc omezena přesností měření poloměru závěsu R — ten totiž ve vztazích vystupuje ve čtvrté mocnině!
(U smaltovaných drátů navíc neznáme přesně tloušťku a vlastnosti smaltované vrstvy.)

Výsledek: opravdu to funguje!



Data z videa z vysokorychlostní kamery.

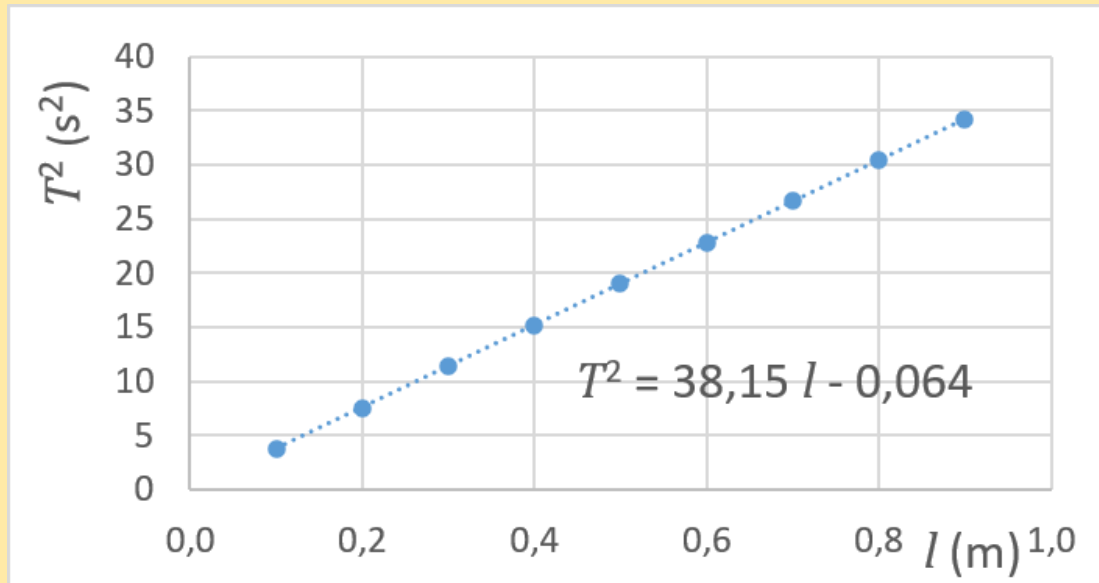
*Viz naměřené výchylky
a proložené tlumené harmonické kmitání.*



Data z videa z mobilu

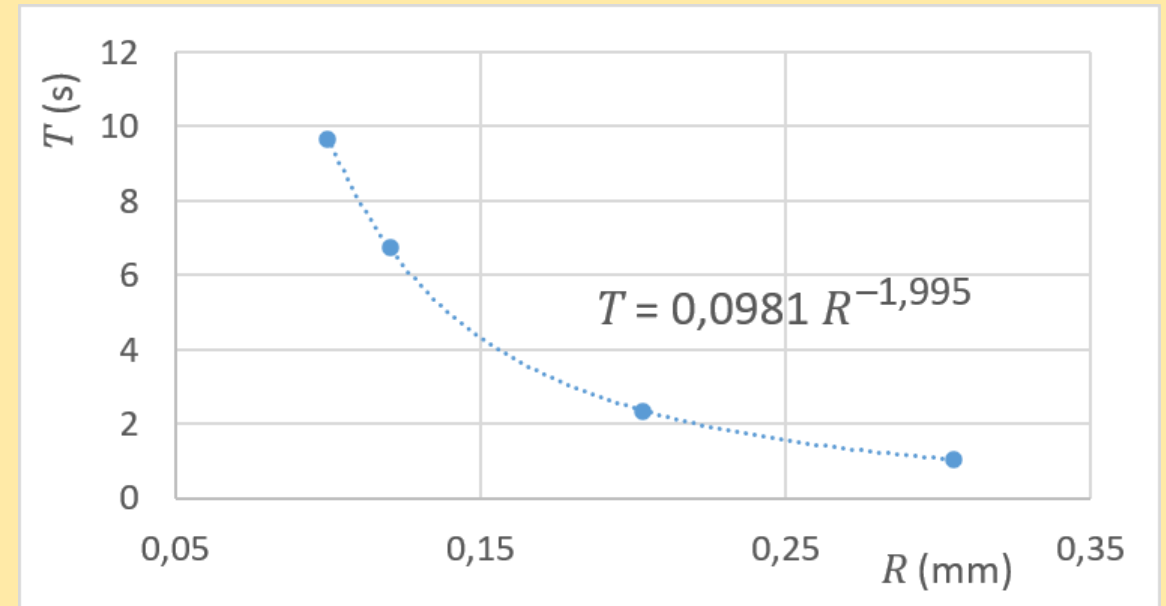
Kmity jsou (tlumené) harmonické i pro amplitudy asi 4 až 5,2 radiánu, (230° až 300°)
(Max. rozdíl naměřených a proložených hodnot φ je jen ~0,3 % amplitudy.).

A jak je to s periodou?



*Závislost periody T na délce závěsu l
(struna e): $T^2 \sim l$*

Hodnoty T^2/l se vzájemně liší jen o desetiny %.



*Závislost periody T na poloměru závěsu R
(struny D'Addario, $l = 70$ cm): $T \sim 1/R^2$*

$T \cdot R^2 = \text{konst.}$, rozdíly nejvýše asi 1,5 %

Pro amplitudy 20° a 180° se periody (měřené stopkami) lišily jen o necelých 0,1 %, analýza videa dala stejně malý rozdíl period pro amplitudy 13° a asi 700°.

A nakonec: souhlasí i modul pružnosti?

Z měření na 4 strunách různých průměrů (vždy pro 3 délky tyčinek) vychází

$$G \approx 82,8 \text{ GPa}$$

(směrodatná odchylka: $\approx 1,1 \text{ GPa}$, tedy asi 1,4 %)

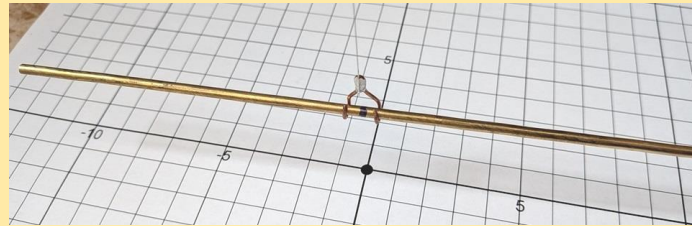
Tabulkové hodnoty G pro ocel: asi 80–85 GPa $\rightarrow$ **naš výsledek odpovídá! ✓**

A co dál?

*Zajímavé by bylo třeba zkusit budit kmity a měřit rezonanční křivku...
... ale to možná až někdy příště.*

Závěr

I s velmi jednoduchou konstrukcí torzního kyvadla lze dobře ověřovat, že se skutečně chová tak, jak předpovídá teorie.



Třeba se vám některé z pokusů budou hodit při práci se žáky a studenty, nebo vás inspirují k experimentům složitějším, citlivějším...

Díky za pozornost!